SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

B. FRANCHI

SOLUZIONI GLOBALI DI EQUAZIONI DI MONGE-AMPERE

2 MARZO 1989

In questo seminario verranno esposti alcuni risultati recentemente ottenuti sull'esistenza di soluzioni positive globali (definite cioè su R^N) per equazioni tipo Monge-Ampère. Più precisamente, si è interessati a soluzioni sufficientemente regolari u del problema

$$(1) \qquad \begin{cases} \det(D^2u) = N(-1)^N g(|Du|^2) f(u) & \text{in } R^N \\ u \geq 0, \ \lim_{x\to\infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

dove $f:[0,\infty] \to R$ è continua, localmente lipschitziana su $(0,\infty)$, $f(0) = 0$, $f(u)<0$ in $(0,\alpha)$, $f(u)>0$ in (α,γ), $f(\alpha) = f(\gamma) = 0$, mentre g è C^1, crescente su $[0,\infty)$ e tale che $tg'(t) \leq \frac{s}{2} g(t)$ per un opportuno $s\geq 0$ e per ogni $t\in [0,\infty)$. Supporremo inoltre $g(0) = 1$.

Nel seguito chiameremo *stato fondamentale* una soluzione del problema (1).

Se $g \equiv 1$ l'equazione in (1) è l'equazione di Monge-Ampère, se $g(p) = (1+p)^{\frac{N+2}{2}}$ l'equazione in (1) equivale a richiedere che la curvatura di Gauss del grafico di u nel punto $(x,u(x))$ sia uguale a $N(-1)^N f(u(x))$.

Nel seguito però il caso della curvatura di Gauss non verrà trattato, in quanto una ulteriore condizione di comportamento all'infinito sarà richiesta per g. Supporremo cioè costantemente che

$$\int_0^\infty \frac{\xi^N}{g(\xi^2)}\, d\xi = \infty.$$

Di fatto, questa ipotesi permette di trattare solo il caso $g(\xi^2) = (1+\xi^2)^{s/2}$ con $0\leq s\leq N+1$. Osserviamo che questa limitazione non è soltanto un fatto tecnico, ma riflette un fenomeno che già si presenta per equazioni dello stesso tipo in un dominio limitato di R^N, dove un annullamento del secondo membro dell'equazione è richiesto sulla frontiera dell'aperto se $s>N+1$ (cfr. [GT], Cap. 17).

Premettiamo ancora alcune considerazioni sul problema (1).

Il fattore N a secondo membro è scritto per semplicità di scrittura successiva.

Il fattore $(-1)^N$ è essenziale: poiché infatti cerchiamo soluzioni nulle all'infinito, è naturale pensare a soluzioni convesse all'infinito; dunque, poiché all'infinito u è piccola e quindi $f(u)<0$ all'infinito, la scelta è giustificata. D'altra parte, come osservato da P.L. Lions in [L], proprietà analoghe a quelle delle autofunzioni del problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace in un aperto di R^N sono soddisfatte dalle soluzioni strettamente convesse del problema

$$\begin{cases} \det(D^2u) - (-\lambda u)^N = 0 & \text{in } \Omega \text{ convesso} \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'equazione in (1) non è di tipo ellittico perché la funzione f cambia di segno: l'equazione cambia tipo a seconda che sia $u>\alpha$ e $u<\alpha$. Al finito, solo pochi risultati sono conosciuti per equazioni tipo Monge-Ampère che cambiano tipo: si veda ad esempio la bibliografia in [F].

Problemi analoghi a (1) sono stati trattati recentemente per l'equazione della *curvatura media* (si vedano [FLS],[APS] e la bibliografia in questi lavori). L'equazione in questo caso diventa:

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) + f(u) = 0.$$

Per lo studio del problema (1) ci limiteremo a considerare soluzioni radiali dell'equazione: ciò è tra l'altro in qualche modo giustificato anche a priori dal fatto che per l'equazione della curvatura media sotto naturali ipotesi per f gli stati fondamentali hanno simmetria radiale ([FL]) e d'altra parte un analogo risultato vale per soluzioni convesse di equazioni tipo Monge-Ampère in un limitato convesso ([GNN]).

Per funzioni a simmetria radiale $u = u(|x|)$ il problema (1) diventa

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{((u')^N)'}{g(|u'|^2)} = (-1)^N r^{N-1} f(u) & \text{per } r>0 \\ \\ u\geq 0,\ u'(0) = 0,\ u(r) \to o & \text{per } r\to\infty \end{cases}$$

dove u è supposta regolare, tale cioè che u e $(u')^{N-1}$ sono C^1 su $[0,\infty)$.

Possiamo sempre supporre N>1 poiché per N=1, casi significativi del problema rientrano in quelli trattati in [FLS].

Poniamo ora $t = r^{\frac{2N}{N+1}}$. Il problema (2) diventa

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{((v')^{N-1}v')'}{g(t^{2a}|v'|^2)} + \dfrac{1}{t}\ \dfrac{N-1}{2}\ \dfrac{(v')^{N-1}v}{g(t^{2a}|v'|^2)} + (-1)^{N-1} f(v) = 0 \\ \\ v\geq 0,\ v'(0) = 0,\ v(t) \to o & \text{per } t\to\infty, \end{cases}$$

dove $a = (N-1)/2N$, $v(t) = u(r)$ e dove abbiamo continuato a denotare con $g(p)$ e $f(u)$ le funzioni $g(\frac{2N}{N+1}p)$ e $\frac{1}{N}(\frac{N+1}{2N})^{N+1} f(u)$ rispettivamente.

Osserviamo per inciso che la condizione $u'(0) = 0$ diventa $v'(t)t^a \to 0$ per $t\to 0+$ che è apparentemente meno restrittiva della condizione $v'(0)=0$ che imponiamo in (3). D'altra parte, per la regola di de l'Hôpital, in (2) u è differenziabile in r=0 e risulta

$$(-u''(0))^N = f(u(0))$$

così che, ancora per la regola di de l'Hôpital,

$$v'(t) = r^{-\frac{N-1}{N+1}} u'(r) \to 0 \qquad \text{per } r \to 0+.$$

Il problema (3) presenta un'analogia formale con i problemi considerati in [FLS] ma non è ellittico in quanto

$$\frac{d}{dp}(p^{N-1}p)$$

cambia in generale segno. Consideriamo allora il problema "ellittico"

$$(P)\qquad \begin{cases} \dfrac{(|v'|^{N-1}v')'}{g(t^{2a}|v'|^2)} + \dfrac{1}{t}\,\dfrac{N-1}{2}\,\dfrac{|v'|^{N-1}v'}{g(t^{2a}|v'|^2)} + f(v) = 0 \qquad \text{per } t \geq 0 \\ \\ v \geq 0,\quad v'(0) = 0,\quad v(t) \to 0 \quad \text{per } t\to\infty, \end{cases}$$

dove v è regolare, nel senso che v e $|v'|^{N-1}v'$ sono C^1 su $[0,\infty)$.

Dimostreremo nel seguito che il problema (P) ha soluzione e che le soluzioni v di (P) verificano $v'\leq 0$. Da ciò segue che una soluzione di (P) è anche soluzione di (3) e quindi, procedendo a ritroso, si ottiene una soluzione del problema (1).

Se $g \equiv 1$ l'equazione in (P) è quella di un (N-1)-Laplaciano in "$\frac{N+1}{2}$ variabili". Dunque in questo caso risultati di esistenza e unicità per il problema (P) sono contenuti in [FLS].

In generale, l'esistenza di una soluzione di (P) verrà provata con un metodo di "shooting". Per utilizzare tale tecnica è essenziale qualche forma di dipendenza continua per le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{(|v'|^{N-1}v')'}{g(t^{2a}|v'|^2)} + \dfrac{1}{t}\,\dfrac{N-1}{2}\,\dfrac{|v'|^{N-1}v'}{g(\ldots)} + f(v) = 0, \quad t>0 \\ \\ u(0) = \xi, \quad u'(0) = 0. \end{cases}$$

Dunque è necessario dapprima applicare il metodo shooting per ricava-

re l'esistenza di soluzioni di una famiglia di problemi regolarizzati. A tal fine, consideriamo la famiglia di problemi

$$(P_\varepsilon)\qquad \begin{cases} \dfrac{(\Omega_\varepsilon(v')v')'}{g(t^{2a}|\Omega_\varepsilon(v')|^{2/N})} + \dfrac{1}{t}\,\dfrac{N-1}{2}\,\dfrac{\Omega_\varepsilon(v')v'}{g(\dots)} + f(v) = 0, \quad t>0 \\ \\ v'(0) = 0, \quad \lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0, \end{cases}$$

dove $\Omega_\varepsilon(p) = (p^2+\varepsilon^2)^{\frac{N-1}{2}}p$ e $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$. Se $\varepsilon>0$, i problemi (P_ε) sono regolarizzazioni del problema $(P) = (P_0)$.

Il primo passo per trattare i problemi (P_ε) è stabilire la seguente identità fondamentale:

per ogni $t_1,t_2\in[0,\infty)$,

$$H(t_2,|v'(t_2)|) - H(t_1,|v'(t_1)|) +$$

$$+ (N-1)\int_{t_1}^{t_2} D(\rho,|v'(\rho)|)\,\frac{d\rho}{\rho} = F(v(t_1)) - F(v(t_2)), \tag{4}$$

dove

$$F(v) = \int_0^v f(s)ds,$$

$$H(t,p) = \int_0^p \frac{z\,d\,\Omega_\varepsilon(z)}{g(t^{2a}|\Omega_\varepsilon(z)|^{2/N})} = \int_0^{\Omega_\varepsilon(p)} \frac{z(\xi)d\xi}{g(t^{2a}\,\xi^{2/N})}$$

essendo $z(\xi) = \Omega_\varepsilon^{-1}(\xi)$ e

$$D(\rho,p) = \frac{1}{2}\,\frac{\Omega_\varepsilon(\rho)p^2}{g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(p)|^{2/N})}$$

$$+ \frac{p}{N}\int_0^p \frac{g'(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(\xi)|^{2/N})\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(\xi)|^{2/N}d\Omega_\varepsilon(\xi)}{g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(\xi)|^{2/N})^2}$$

$$+ \frac{1}{N}\int_0^p dz\int_0^z \frac{g'(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(\xi)|^{2/N})\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(\xi)|^{2/N}d\Omega_\varepsilon(\xi)}{g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(\xi)|^{2/N})^2}\ .$$

La dimostrazione di (4) è una semplice verifica, tenuto conto del fatto che, per ipotesi, v e $\Omega_\varepsilon(v')$ sono C^1 su $[0,\infty)$.

La formula (4) dà buone stime a priori per la soluzione in quanto ci sono precisi controlli sulla funzione D. Si ha infatti:

Lemma 1. *Per ogni* $\rho\geq 0$, *per ogni* $\rho\geq 0$

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\Omega_\varepsilon(\rho)p}{g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(\rho)|^{2/N})} \leq D(\rho,p) \leq (2^N + \frac{s}{N})H(\rho,p).$$

Dimostrazione. La disuguaglianza di sinistra viene dal fatto che, integrando per parti,

$$D(\rho,p) = \frac{1}{2}\,\frac{\Omega_\varepsilon(p)p}{g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(p)|^{2/N})} + \frac{1}{N}\int_0^p z\,\frac{g'(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(z)|^{2/N})\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(z)|^{2/N}d\Omega_\varepsilon(z)}{g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(z)|^{2/N})^2}\ .$$

D'altra parte la stessa uguaglianza dà:

$$D(\rho,p) \le \frac{1}{2}\frac{\Omega_\varepsilon(p)p}{g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(p)|^{2/N})} + \frac{S}{N}\int_0^p \frac{z\, d\,\Omega_\varepsilon(z)}{g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(z)|^{2/N})} \quad .$$

Ma

$$\Omega_\varepsilon(\tfrac{p}{2}) = \frac{p}{2}\left(\frac{p^2}{4}+\varepsilon^2\right)^{\frac{N-1}{2}} = \frac{1}{2^N}\, p(p^2+4\varepsilon^2)^{\frac{N-1}{2}} \ge \frac{1}{2^N}\,\Omega_\varepsilon(p),$$

e quindi

$$H(\rho,p) \ge \int_{p/2}^p \frac{z d\,\Omega_\varepsilon(z)}{g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(z)|^{2/N})} \ge \frac{p}{2g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(p)|^{2/N})}\int_{p/2}^p d\Omega_\varepsilon(z) =$$

$$= \frac{p}{2g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(p)|^{2/N})}\,[\Omega_\varepsilon(p)-\Omega_\varepsilon(\tfrac{p}{2})] \ge$$

$$\ge \frac{p\,\Omega_\varepsilon(\frac{p}{2})}{2g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(\rho)|^{2/N})} \ge \frac{1}{2^N}\,\frac{\Omega_\varepsilon(\rho)p}{2g(\rho^{2a}|\Omega_\varepsilon(p)|^{2/N})} \quad ,$$

da cui l'asserto.

Elenchiamo ora alcune conseguenze dell'identità (4) e del Lemma 1 che ci forniscono informazioni qualitative sul comportamento delle soluzioni dei problemi (P_ε).

Lemma 2. *Se* v *è soluzione dell'equazione di* (P_ε) $(\varepsilon\ge 0)$ *in un intervallo* I *e se* $t_0 \in I$ *è un punto critico di* v, *allora o* $v(t)\le v(t_0)$ $\forall t\in I$, $t\ge t_0$ *o* $v(t)\ge v(t_0)$ $\forall t\in I$, $t\ge t_0$.

La dimostrazione è analoga a quella della stessa proprietà in [FLS].

Possiamo ora provare che gli stati fondamentali sono decrescenti.

Lemma 3. *Se* v *è soluzione del problema* (P_ε) $(\varepsilon \geq 0)$, *allora* $v'(t) \leq 0$ $\forall t \in [0,\infty)$.

Dimostrazione. Osserviamo che, per il lemma 2, $v(t) \leq v(0)$ $\forall t \in [0,\infty)$. Supponiamo per assurdo che esista $\bar{t}>0$ tale che $u'(\bar{t})>0$. Sarà allora $\min_{[0,\bar{t}]} v = v(\tau)$ con $\tau \in (0,\bar{t})$. Ma allora o $v(t) \leq v(\tau)$ o $v(t) \geq v(\tau)$ per ogni $t \geq \tau$.

La prima eventualità è esclusa perché $v(t) > v(\tau)$. La seconda è esclusa dal fatto che $v(\infty)=0$ se $v(\tau)>0$. D'altra parte, se $v(\tau)=0$, allora $v \equiv 0$ dopo τ, mentre ancora $v(\bar{t}) > v(\tau)$.

La dimostrazione del lemma precedente mostra di fatto che vale il risultato più forte:

se $t>0$ *e* $v(t) > 0$, *allora* $v'(t) < 0$.

Lemma 4. *Se* v *è una soluzione di* (P_ε) $(\varepsilon \geq 0)$, *allora* $v'(t) \to 0$ *per* $t \to \infty$.

Dimostrazione. Se t è abbastanza grande, $f(v(t)) \leq 0$, e quindi dall'equazione

$$(\Omega_\varepsilon(v'))' = -\frac{1}{t}\frac{N-1}{2}\Omega_\varepsilon(v') - g(t^{2a}|\Omega_\varepsilon(v')|^{2/N})f(v(t)) \geq 0.$$

Dunque, $\Omega_\varepsilon(v')$ ha limite all'infinito e questo limite non può essere che zero. Quindi $v'(t) \to 0$ per $t \to \infty$.

L'osservazione precedente ci permette di passare al limite in (4) per

$t_2 \to \infty$. Scegliendo $t_1=0$ si ha

$$(5) \qquad (N-1)\int_0^\infty D(\rho,|v'(\rho)|)\,\frac{d\rho}{\rho} = F(v(0)).$$

La (5) ci dice in particolare che $\{v;\ F(v)>0\} \neq \emptyset$. Come in [FLS] è naturale allora porre

$$\beta = \inf\{v>0\ ;\ F(v)>0\}.$$

Risulta $\alpha<\beta$. *Nel seguito supporremo che* $\beta \in (\alpha,\gamma)$.

Per semplicità, supporremo f prolungata con zero per $v \leq 0$.

Teorema 5. *Se* $\varepsilon>0$ *e* f *lipschitziana su* $[0,\infty)$, *allora il problema di Cauchy*

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{(\Omega_\varepsilon(v'))'}{g(t^{2a}|\Omega_\varepsilon(v')|^{2/N})} + \dfrac{1}{t}\,\dfrac{N-1}{2}\,\dfrac{\Omega_\varepsilon(v')}{g(t^{2a}|\Omega_\varepsilon(v')|^{2/N})} + f(v)=0, \quad t>0 \\ v(0) = \xi \quad (0,\gamma) \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che può essere prolungata su $[0,\infty)$ *e che dipende con continuità da* ξ *insieme alla sua derivata prima.*

Dimostrazione. Poniamo $w = t^{\frac{N-1}{2}}\,\Omega_\varepsilon(v')$. L'equazione in (6) diventa

$$\frac{w'}{g(|w|^{2/N})} = -\,t^{\frac{N-1}{2}}\,f(v),$$

e quindi

$$G(w) = -\int_0^t \sigma^{\frac{N-1}{2}} f(v(\sigma))d\sigma, \tag{7}$$

dove $$G(w) = \int_0^w \frac{1}{g(|\sigma|^{2/N})}\, d\sigma .$$

A questo punto, l'esistenza di una soluzione vicino a zero può essere provata con un teorema di punto fisso applicato all'operatore

$$v \to T(v) = \xi - \int_0^t G^{-1}\Big(\int_0^\tau \sigma^{\frac{N-1}{2}} f(v(\sigma))d\sigma\Big)d\tau .$$

Denotiamo con $[0,R_\xi)$ l'intervallo massimale di prolungabilità della soluzione di (6). Se $R_0 = \sup\{t<R_\xi;\ v>0 \text{ su } [0,t]\} < R_\xi$, allora $v(R_0) = 0$ e $v'(R_0)>0$ per usuali risultati di unicità e quindi dopo R_0 v può essere scritta esplicitamente e risulta $R_\xi = \infty$. D'altra parte, non può essere $R_0=R_\xi$. Infatti, tenuto conto del fatto che $v'\le 0$, risulta dall'equazione che $(\Omega_\varepsilon(v'))' \ge 0$ in un intorno sinistro di R_0. Dunque sia v sia v' hanno limite per $t\to R_0-$ e quindi la soluzione può essere prolungata a sinistra di R_0 che è quindi minore di R_ξ. Possiamo dunque supporre $0<v<(0)$ su $(0,R_\xi)$.

Osserviamo dapprima che, poiché $\int_0^\infty \frac{\xi^N}{g(\xi^2)}\, d\xi = \infty$, allora v' è limitata su $[0,R_\xi)$. Infatti per la (4) e per il Lemma 1 dove $|v'(t)| \ge 1$ risulta

$$F(v(0))-F(v(t)) \ge \int_\varepsilon^{|v'(t)|} \frac{z\Omega'(z)dz}{g(t^{2a}|\Omega_\varepsilon(z)|^{2/N})} \ge$$

$$\ge N\int_\varepsilon^{|v'(t)|} \frac{z^N}{g(t^{2a}2^{2a}z^2)}\, dz = \{(2t)^a z = \xi\}$$

$$= C_N t^{-a(N+1)} \int_{(2t)^a \varepsilon}^{(2t)^a |v'(t)|} \frac{\xi^N}{g(\xi^2)}\, d\xi \geq$$

$$\geq C_N R_\xi^{-a(N+1)} \int_{(2t)^a \varepsilon}^{(2t)^a |v'(t)|} \frac{\xi^N}{g(\xi^2)}\, d\xi,$$

e quindi non può essere $\sup_{[o,R_\xi]} |v'| = \infty$.

In particolare allora v ha limite per $t \to R_\xi -$. Proviamo ora che anche v' ha limite per $t \to R_\xi -$ (necessariamente finito). Sia $(t_n)_{n\ N}$ una arbitraria successione in $(0,R_\xi)$ tale che $t_n \to R_\xi$, $v'(t_n) \to \ell$. Per quanto abbiamo appena provato, possiamo passare al limite in (4) ottenendo

$$(8) \qquad \int_o^{|\ell|} \frac{z\, d\Omega_\varepsilon(z)}{g(R_\xi^{2a} |\Omega_\varepsilon(z)|^{2/N})}$$

$$= F(v(0)) - F(v(R_\xi)) + (1-N) \int_0^{R_\xi} D(\rho, |v'(\rho)|)\, \frac{d\rho}{\rho}$$

Se dunque esistono in $(0,R_\xi)$ due successioni $(t'_n)_{n\in N}$ e $(t''_n)_{n\in N}$ convergenti a R_ξ e tali che in corrispondenza v' tenda a due limiti diversi ℓ_1 e ℓ_2, per la (8) $\ell_1 = -\ell_2 \neq 0$. Ma allora esisterebbe una successione $(\tau_n)_{n\in N}$ in $(0,R_\xi)$ tale che $v'(\tau_n)=0$ per ogni $n\in N$, il che contraddirebbe (8). Dunque v'(t) ha limite per $t \to R_\xi -$ e dunque la soluzione può essere prolungata a destra di R_ξ.

La rimanente parte dell'enunciato può essere provata in modo usuale a partire dalla formula (7).

A questo punto è possibile provare il seguente

Lemma 6. *Se* $\varepsilon>0$ *e* f *è lipschitziana su* $[0,\infty)$, *allora il problema* (P_ε) *ha una soluzione* v_ε *tale che* $v_\varepsilon(0)\in[\beta,\gamma)$.

Dimostrazione. Scegliamo $\xi\in[\beta,\gamma)$. Osserviamo che per la (7) $w'<0$ vicino a zero e quindi $v'<0$ vicino a zero. Possono presentarsi tre eventualità:

(i) $v>0$ *su* $[0,\infty)$, $v'<0$ *su* $[0,\infty)$.

(ii) *esiste* $T_\xi>0$ *tale che* $v'<0$ *in* $(0,T_\xi)$ *e* $v(T_\xi)=0$. In questo caso, per l'unicità del problema di Cauchy, $v'(T_\xi)<0$.

(iii) *esiste* $T_\xi>0$ *tale che* $v'(T_\xi)=0$, $v'<0$ *in* $(0,T_\xi)$, $v(T_\xi)>0$. Notiamo che in questo caso $v(T_\xi)\neq\alpha$ per l'unicità del problema di Cauchy. D'altra parte, essendo $(\Omega_\varepsilon(v'))'(T_\xi)=-f(v(T_\xi))$, non può essere $f(v(T_\xi))>0$ perché $v'<0$ a sinistra di T_ξ. Dunque $f(v(T_\xi))<0$ e quindi T_ξ è un punto di minimo. Per il Lemma 1 allora $v(t)\geq v(T_\xi)$ $t\geq 0$.

Si può ora procedere analogamente a [BLP] e [FLS]. Poniamo

$$I_+ = \{\xi\in[\beta,\gamma)\ ;\ \inf v > 0\}$$

$$I_- = \{\xi\in[\beta,\gamma)\ ;\ v(R)=0 \text{ per qualche } R>0\}.$$

Si dimostra che $I_\pm\neq\emptyset$ e che gli insiemi sono entrambi aperti. Un argomento di connessione assicura allora che esiste $\xi\in[\beta,\gamma)$, $\xi\notin I_\pm$. Dunque (ii) e (iii) non possono verificarsi e si verifica quindi la (i). D'altra parte non può essere $v(\infty)=\inf\{v(t),\ t\geq 0\}>0$ e quindi v è soluzione del problema (P_ε).

I_- *è aperto*: la prova è la stessa di [FLS].

I_+ *è aperto:* sia $\bar v$ la soluzione tale che $\bar v(0)=\xi_0\in I_+$.

Possono verificarsi solo i casi (iii) e (i). Se si verifica il caso (iii) la prova è semplice tenuto conto di quanto là osservato e della dipendenza continua di v' da ξ. Supponiamo che si verifichi (i). Allora $v'<0$ in $(0,\infty)$ e

$\bar{v}(\infty) = \ell > 0$. Proviamo che $f(\ell)=0$. Per assurdo, supponiamo $f(\ell) \neq 0$; poiché $\bar{v}'<0$, $\bar{v}$ tende a ℓ da sopra e $f(\bar{v}(\tau))$ ha segno costante per t grande. Allora per (7) $\bar{w}'$ ha un segno per t grande e quindi $\bar{w}$ ha limite all'infinito. Ora (l'integrale è divergente all'infinito)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \tau^{\frac{N-1}{2}} f(\bar{v}(\tau))g(|\bar{w}(\tau)|^{2/N})d\tau}{\tau^{\frac{N+1}{2}}} = \frac{2}{N+1} \lim_{t\to\infty} f(\bar{v}(t))g(|\bar{w}(t)|^{2/N}).$$

Dunque se $f(\ell) \neq 0$

$$\lim_{t\to\infty} |\Omega(\bar{v}')| = \lim_{t\to\infty} t \frac{|\bar{w}(t)|}{t^{\frac{N+1}{2}}} = +\infty.$$

Ma questo implica che $|\bar{v}'(t)|\to\infty$ per $t\to\infty$ che è impossibile perché $\bar{v}$ ha limite $v(\infty)$. Dunque, essendo $\bar{v}$ decrescente e lontana da zero, necessariamente $\ell=\alpha$. Poiché $\bar{v}$ ha limite all'infinito, esiste una successione $t_n\to\infty$ tale che $|v'(t_n)|\leq 1$. Dalla (4) per il teorema di Lebesgue si ha

$$(N-1)\int_0^\infty D(\rho,|\bar{v}^{-1}(\rho)|)\frac{d\rho}{\rho} = F(v(0)) - F(\ell) < \infty.$$

Scegliamo $R>0$ così che $(N-1)\int_R^\infty < \frac{1}{4}|F(\alpha)|$ e sia $\delta>0$ tale che se $\xi \in [\beta,\gamma)$, $|\xi-\xi_0|<\delta$, allora $|F(\xi)-F(\xi_0)|\frac{1}{4}|F(\alpha)|$ e la soluzione del corrispondente problema di Cauchy v è positiva su $[0,R]$. Inoltre possiamo scegliere δ abbastanza piccola in modo che

$$(N-1)\left|\int_0^R (D(\rho,|v'(\rho)|) - D(\rho,|\bar{v}^{-1}(\rho)|))\frac{d\rho}{\rho}\right| < \frac{1}{4}|F(\alpha)|.$$

Infatti per la dipendenza continua delle soluzioni è sufficiente mostrare che lo integrale è uniformemente piccolo vicino a zero. Infatti, per il Lemma 1,

$$\frac{1}{\rho} D(\rho,|v'(\rho)|) \leq C_N \frac{1}{\rho} \Omega_\varepsilon(|v'(g)|) \cdot (-v'(\rho)) =$$

$$= C_N (-v'(\rho)) \frac{|w(\rho)|}{\rho^{\frac{N+1}{2}}} = (r \in (0,\rho))\ C_N' (-v'(\rho)) \cdot$$

$$\cdot \left|\frac{w'(r)}{r^{\frac{N-1}{2}}}\right| = C_N' g(|w|^{2/N}) f(v(r))(-v'(\rho))$$

che è maggiorato uniformemente su $[0,\bar\rho]$ se $\bar\rho$ è abbastanza piccolo per la dipendenza continua di v e v'.

Allora, se $t > R$, abbiamo

$$F(\xi)-F(v(t)) \geq (N-1)\int_0^t D(\rho,|v'(\rho)|)\frac{d\rho}{\rho} \geq$$

$$\geq (N-1)\int_0^R D(\rho,|v'(\rho)|)\frac{d\rho}{\rho} \geq (N-1)\int_0^R D(\rho,|\bar v^{-1}(\rho)|)\frac{d\rho}{\rho} - \frac{1}{4}|F(\alpha)| \geq$$

$$\geq (N-1)\int_0^\infty D(\rho,|\bar v^{-1}(\rho)|)\frac{d\rho}{\rho} - \frac{1}{2}|F(\alpha)| =$$

$$= F(\xi_0) - \frac{1}{2}F(\alpha) > F(\xi) + \frac{1}{4}|F(\alpha)|$$

e quindi $F(v(t)) > 0\ \ \forall t \in [0,\infty)$ e dunque $\xi \subset I_+$ che è dunque aperto.

I_+ *non è vuoto:* come in [FLS], si prova che $\beta \in I_+$.

I_- *non è vuoto:* per assurdo, supponiamo che per ogni $\xi \in [\beta,\gamma)$ la soluzione del corrispondente problema di Cauchy abbia il seguente comportamento: poniamo

$R = \sup\{t>0;\ v'<0 \text{ su } (0,t)\}$. Allora o $R<\infty$, $m=v(R)>0$, $v'(R)=0$ o $R=\infty$ e $m = \lim_{t\to\infty} v(t)\geq 0$. Ora proviamo che $f(m)\leq 0$. Infatti se $R<\infty$ e $f(m)>0$, per l'equazione v' è decrescente in R, contraddicendo il fatto che $v'<0$ a sinistra di R. Se $R=\infty$, allora, come nella prova che I_+ è aperto, $f(m) = 0$. In particolare allora $F(m)\leq 0$ in ogni caso. Sia ora $\bar\beta\in(\beta,\gamma)$ fissato. Poiché ogni soluzione ha un limite $m\in[0,\alpha]$ in R, se $\xi>\bar\beta$ esiste $R_\xi\in(0,R)$ tale che $v(R_\xi) = \bar\beta$. Per la dipendenza continua delle soluzioni $R_\xi \to \infty$ se $\xi \to \gamma$. Per la (4) con $t_2 = R$, $t_1 = R_\xi$,

$$-\int_0^{|v'(R_\xi)|} \frac{z^d\,\Omega_\xi(z)}{g(R_\xi^{2a}|\Omega_\varepsilon(z)|^{2/N}} + (N-1)\int_{R_\xi}^{R} D(\rho,|v'(\rho)|)\,\frac{d\rho}{\rho} = F(\bar\beta)-F(m).$$

L'uguaglianza è vera anche per $R=\infty$, in quanto è possibile trovare una successione $(t_n)_{n\in N}$ divergente tale che $|v'(t_n)|\leq 1$.

Ora

$$F(\bar\beta) < (N-1)\int_{R_\xi}^{R} D(\rho,|v'(\rho)|)\,\frac{d\rho}{\rho} + F(m) \leq$$

$$\leq (N-1)\int_{R_\xi}^{R} D(\rho,|v'(\rho)|)\,\frac{d\rho}{\rho}\ .$$

Ora, per il Lemma 1,

$$D(\rho,\ v'(\rho)|) \leq C_N\, H(\rho,|v'(\rho)|) \leq C_N'|v'(\rho)|(1+H(\rho,|v'(\rho)|))$$

$$\leq \text{(per (4))}\ \ C_N'|v'(\rho)|\ (1+F(\gamma)+|F(\alpha)|) = c_2|v'(\rho)|,$$

dove c_2 è indipendente da ε da ξ.

Allora

$$F(\bar\beta) \le c_2(N-1)\,\frac{1}{R_\xi}\,(v(R_\xi)-v(R)) \le \frac{c_2(N-1)(\bar\beta-m)}{R_\xi}$$

e quindi se $\xi\to\gamma-$, $F(\bar\beta) \le 0$, il che è impossibile perché $\bar\beta\in(\beta,\gamma)$.

La prova del Lemma è così conclusa.

Teorema 7. *Supponiamo che*

(i) f *è continua su* $[0,\infty)$ *e localmente lipschitziana su* $(0,\infty)$, $f(0)=0$, $f(u)<0$ *in* $(0,\alpha)$, $f(u)>0$ *in* (α,γ), $f(\alpha) = f(\gamma) = 0$;

(ii) *esiste* $\beta = \inf\{v;F(v)>0\}\in(\alpha,\gamma)$;

(iii) $$\int_0^\infty \frac{\xi^N}{g(\xi^2)}\,d\xi = \infty.$$

Allora il problema (P) *ha una soluzione regolare.*

Dimostrazione. Denotiamo con v_ε la soluzione del problema (P_ε) dove la funzione f è stata sostituita da f_ε definita nel modo seguente:

$$f_\varepsilon(v) = \int f(t-\varepsilon)\omega\left(\frac{v-t}{\varepsilon}\right)\frac{dt}{\varepsilon}\ ,$$

dove ω è un usuale moltiplicatore. Poiché possiamo sempre supporre $f(v) < 0$ su (γ,∞), f_ε verifica ancora (i) e (ii) per opportuni α_ε, β_ε, γ_ε. Inoltre

$$F_\varepsilon(v_\varepsilon(o)) - F_\varepsilon(v_\varepsilon(t)) \le F_\varepsilon(\gamma) + |F_\varepsilon(\alpha_\varepsilon)| \le M^*,$$

con M^* indipendente da ε.

Sia $T>0$ fissato. Applicando la (4) si ha allora per $t\in[0,T]$ se $|v_2'(t)|>1$:

$$M^* \geq H(t,|v'(t)|) \geq N\int_0^{|v'_\varepsilon(t)|} \frac{z^N}{g(T^{2a}|\Omega_1(z)|^{2/N})}\,dz \geq$$

$$\geq N\int_1^{|v'_\varepsilon(t)|} \dots \geq N\int_1^{|v'_\varepsilon(t)|} \frac{z^N}{g((2T)^{2a}z^2}\,dz =$$

$$= (2T)^{a(N+1)} \int_{(2T)^{2a}}^{(2T)^{2a}|v'_\varepsilon(t)|} \frac{\xi^N}{g(\xi^2)}\,d\xi.$$

Quindi, per (iii), esiste $M_T>0$ tale che

$$|v'_\varepsilon(t)| \leq M_T \text{ su } [0,T] \quad \text{per} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 1.$$

Possiamo allora trovare una successione $v_n = v_{\varepsilon_n}$ che converge a una funzione continua v uniformemente sui compatti di $[0,\infty)$.

Con ovvio significato dei simboli, per il teorema di Lebesgue si ha:

$$G(w_n) = G(t^{\frac{N-1}{2}}\,\Omega_n(v'_n)) = -\int_0^t \sigma^{\frac{N-1}{2}}\, f_n(v_n)d\sigma \xrightarrow{n\to\infty}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} -\int_0^t \sigma^{\frac{N-1}{2}}\, f(v)d\sigma.$$

Se $G(\infty) = \infty$, questo implica che

$$w_n(t) \to w(t) \overset{\text{def}}{=} G^{-1}(-\int_0^t \sigma^{\frac{N-1}{2}}\, f(v(\sigma))d\sigma) \quad \forall t > 0.$$

D'altra parte, se $G(\infty) < \infty$,

$$0 \leq \int_0^t \sigma^{\frac{N-1}{2}} f_n(v_n(\sigma))d\sigma = G(|W_n|) \leq G(T^{\frac{N-1}{2}} \Omega_1(M_T)) < G(\infty)$$

e l'argomento può essere ripetuto.

Chiaramente w definita sopra è di classe C^1. Inoltre, se t>0

$$(9) \qquad -v_n'(t) \longrightarrow t^{-\frac{N-1}{2N}}(-w(t))^{1/N} = -\tilde{v}(t) \quad \text{per} \quad n \to \infty,$$

Infatti se $0<t\leq T$, ricordando che $|v_n'(t)| \leq M_T$, si ha:

$$|v_n'|^N < -v_n'(v_n'^2 + \varepsilon_n^2)^{\frac{N-1}{2}} \leq |v_n'|^N + C_{T,N}\varepsilon_n.$$

Quindi

$$-\Omega_n(v_n') - C_{T,N}\varepsilon_n \leq |v_n'|^N \leq -\Omega_n(v_n'),$$

cioè

$$-t^{\frac{N-1}{2}} w_n(t) - C_{T,N}\varepsilon_n \leq (-v_n'(t))^N \leq -t^{\frac{N-1}{2}} w_n(t).$$

Chiaramente $\tilde{v}$ definita sopra è continua. Inoltre $\tilde{v}(t) \to 0$ per $t \to 0+$, perché

$$\lim_{t\to 0+} (\tilde{v}(t))^N = (-1)^{N+1} \lim_{t\to 0+} \frac{w(t)}{t^{\frac{N-1}{2}}} =$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{(G^{-1})'(-\int_0^t \sigma^{\frac{N-1}{2}} f(v)d\sigma)\, t^{\frac{N-1}{2}} f(v(t))}{\frac{N-1}{2}\, t^{(N-1)/2-1}} =$$

$$= \frac{2(-1)^{N+1}}{N-1} \lim_{t\to 0+} t(G^{-1})'\Big(\int_0^t \sigma^{\frac{N-1}{2}} f(v)d\sigma\Big)\, f(v) = 0$$

perché $(G^{-1})'/0) = 1$.

Così, poiché $\tilde{v}$ è continua su $[0,\infty)$, v è differenziabile e $v'=\tilde{v}$. Inoltre $v'\leq 0$ e

$$w(t) = t^{\frac{N-1}{2}} |v'|^{N-1} v' = G^{-1}\Big(-\int_0^t \sigma^{\frac{N-1}{2}} f(v)d\sigma\Big).$$

Dunque v è regolare, $v'(o)=0$ e v soddisfa l'equazione in (P). Essendo inoltre $v'\leq 0$, risulta $v(t) \to \ell \in [o,\gamma]$ per $t\to\infty$. Resta da mostrare che $\ell=0$.

Per prima cosa, mostriamo che $\ell\neq\gamma$ (cioè $v\not\equiv\gamma$). In caso contrario, se $T>0$ è fissato, abbiamo

$$0=(N-1)\int_0^\infty D(\rho,|v'(\rho)|)\,\frac{d\rho}{\rho} \geq (N-1)\int_0^T D(\rho,|v'(\rho)|)\,\frac{d\rho}{\rho} =$$

$$=(N-1)\int_0^T [D(\rho,|v'(\rho)|) - D_n(\rho,|v_n'(\rho)|)]\,\frac{d\rho}{\rho} +$$

$$+(N-1)\int_0^\infty D_n(\rho,|v_n'(\rho)|)\,\frac{d\rho}{\rho} - (N-1)\int_T^\infty D_n(\rho, v_n'(\rho)|)\,\frac{d\rho}{\rho} = I_1+I_2+I_3.$$

Ora $I_2 = F_n(v_n(0)) > \frac{2}{3} F(\gamma)$ se n è sufficientemente grande.

$$|I_3| \leq \frac{N-1}{T}\int_T^\infty D_n(\rho,|v_n'(\rho)|)d\rho \leq \frac{C_N}{T}\int_T^\infty (1+H_n(\rho,|v_n'(\rho)|))(-v_n'(\rho))d\rho$$

$$\leq \text{(per la (4))}\ \frac{C_N}{T}\,(1+M^*)(v_n(T)-v_n(\infty)) \leq \frac{C_N'}{T}\gamma\,\frac{F(\gamma)}{4} \text{ se T è sufficientemente grande.}$$

Finalmente $(I_1) < \frac{F(\gamma)}{4}$ se T è fissato come sopra e n è sufficientemente grande. Basta infatti osservare che gli integrali sono uniformemente piccoli vicino a zero (come fatto nella prova del lemma precedente) e poi applicare il Teorema di Lebesgue.

Dunque risulta

$$0 \geq \frac{F(\gamma)}{6} > 0$$

e quindi $v \neq \gamma$.

Lo stesso argomento mostra poi che

$$F(v(0)) = (N-1) \int_0^\infty D(\rho, |v'(\rho)|) \frac{d\rho}{\rho} .$$

D'altra parte, poiché v ha limite finito all'infinito, come già fatto ripetutamente possiamo passare al limite in (4), ottenendo

$$(N-1) \int_0^\infty D(\rho, |v'(\rho)|) \frac{d\rho}{\rho} = F(v(0)) - F(\ell)$$

e quindi $F(\ell)=0$. Non può essere d'altra parte $\ell=\beta$ perché in tal caso risulterebbe

$0 \geq w(t) = t^{\frac{N-1}{2}} |v'(t)|^{N-1} v'(t)$ decrescente strettamente in un intorno dell'infinito e quindi si avrebbe $w(t) \longrightarrow w_\infty \in [-\infty, 0)$ per $t \to \infty$. In ogni caso dunque sarebbe

$$-v'(t) \geq c_0 \, t^{-\frac{N-1}{2N}} \qquad \text{per t grande con } c_0 > 0.$$

Questo è impossibile perché $\frac{N-1}{2N} < \frac{1}{2}$ e v ha limite finito.

Dunque $\ell=0$ e l'asserto è completamente provato.

BIBLIOGRAFIA

[APS] F.V. ATKINSON, L.A. PELETIER e J. SERRIN, Ground States for the Prescribed Mean Curvature Equation: the Supercritical Case, "Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States", W.M. Ni, L.A. Peletier and J. Serrin eds., Springer, New York-Berlin, 1988.

[BLP] H. BERESTYCKI, P.L. LIONS e L.A. PELETIER, On ODE Approach to the Existence of Positive solutions for Semilinear Problems in R^N, Indiana Math. J., 30 (1981), 141-157.

[F] B. FRANCHI, Equazioni di Monge-Ampère reali, Seminario di Analisi Matematica del Dipartimento Matematico dell'Università di Bologna, 1986/1987.

[FL] B. FRANCHI e E. LANCONELLI, Radial Symmetry of the Ground States for a Class of Quasilinear Elliptic Equations, "Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States", W.M. Ni, L.A. Peletier and J. Serrin eds., Springer, New York-Berlin, 1988.

[FLS] B. FRANCHI, E. LANCONELLI e J. SERRIN, Existence and Uniqueness of Ground State Solutions of Quasilinear Elliptic Equations, "Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States", W.M. Ni, L.A. Peletier and J. Serrin eds., Springer, New-York-Berlin, 1988.

[GNN] B. GIDAS, W.M. NI e L. NIRENBERG, Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle, Comm. Math. Phys. 68 (1979), 209-243.

[GT] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Second Edition, Springer, 1983.

[L] P.L. LIONS, Two Remarks on Monge-Ampère Equations, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 142 (1985), 263-275.